

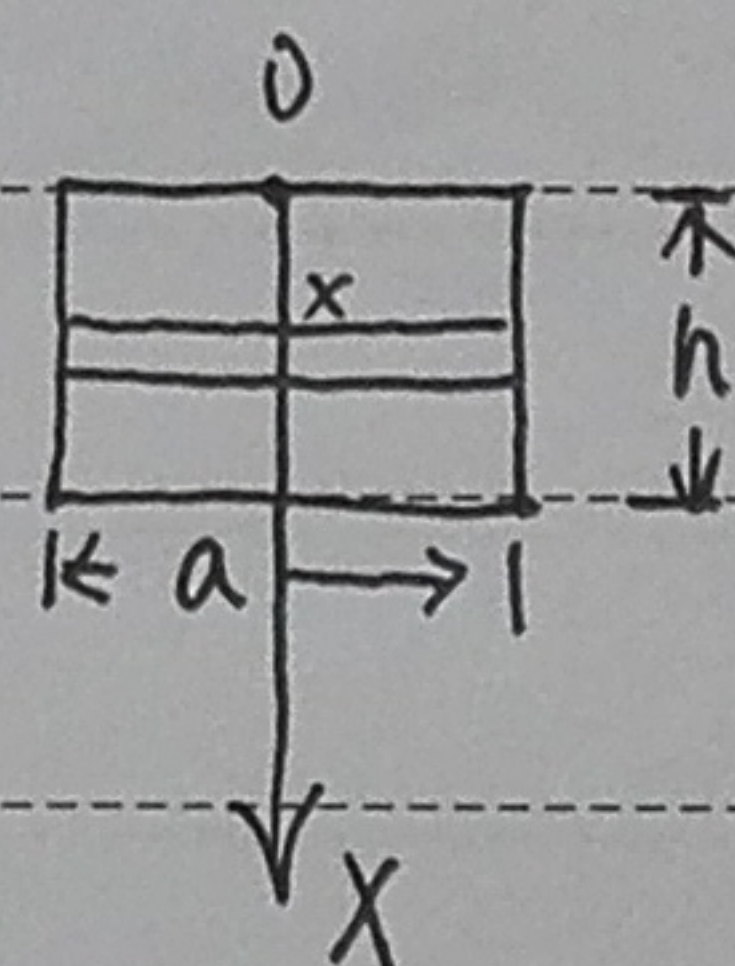
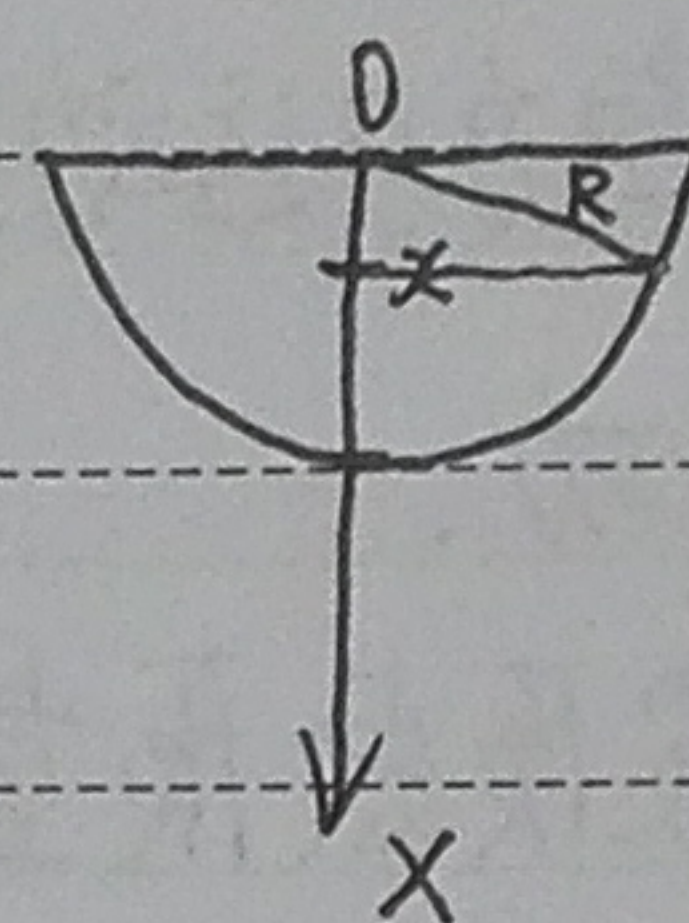
华东交通大学考试专用答题纸 (适用于匿名改卷)

课程: 6.6 定积分在物理上的应用

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

考生注意: 答题时应注明题号, 并按题号顺序答题。

题号	答题内容
P136	廖国勇
一 1	设半径为 R 的半球形水池盛满水, 则将水全部吸尽所做的功 $W =$ _____ 解: $dw = \pi(R^2 - x^2) dx \cdot \rho \cdot g \cdot x$ $= \pi \rho g (R^2 x - x^3) dx$ $W = \int_0^R dw = \int_0^R \pi \rho g (R^2 x - x^3) dx$ $= \pi \rho g \left(\frac{R^2}{2} x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big _0^R$ $= \frac{\pi}{4} \rho g R^4$ ρ 为水的密度, g 为重力加速度
2	设宽 a 米, 高为 h 米矩形闸门垂直放入水中, 上沿与水面相齐, 则闸门一侧所受压力 $F =$ _____ 解: $dF = p dA$ $= \rho g x \cdot a dx$ $F = \int_0^h dF = \int_0^h \rho g a x dx$ $= \frac{a}{2} \rho g x^2 \Big _0^h$ $= \frac{a}{2} \rho g h^2$



题号

P136

答 题 内 容

廖国勇

一 3 函数 $y=x^2+1$ 在区间 $[1, 3]$ 上的平均值为 —

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \bar{y} &= \frac{1}{3-1} \int_1^3 y dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^3 (x^2+1) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_1^3 \\
 &= \frac{1}{2} (9+3) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + 1 \right) \\
 &= \frac{16}{3}
 \end{aligned}$$

二 1 一质点按规律 $s=t^3$ 作直线运动, 式中 s 是位移, t 是时间, 已知质点运动的阻力与运动速度成正比, 求质点从 $s=0$ 运动到 $s=8$ 时克服阻力所做的功.

解: 设质点质量为 m , $v(t) = s'(t) = 3t^2$ $a(t) = s''(t) = 6t$
 $s=0$ 时 $t=0$; $s=8$ 时 $t=2$ ~~$F(t) = m a(t) = 6mt$~~ $F(t) = k v(t)$

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^8 F(t) ds = \int_0^2 k v(t) \cdot 3t^2 dt = \int_0^2 k 9 t^4 dt \\
 &= \int_0^2 \cancel{6mt} \cdot 3t^2 dt = \frac{9}{5} k t^5 \Big|_0^2 \\
 &= \frac{9}{5} m t^4 \Big|_0^2 = 72m = \frac{288}{5} k
 \end{aligned}$$

$$F(t) = k v(t) = 3k t^2 \quad k \text{ 为比例常数}$$

题号	答题内容	廖国勇
二 2	一形如圆台形的桶盛满水,桶高 3m,上,下底半径分别为 1m 和 2m,求将水吸完所做的功。 解: 以上圆圆心为原点,垂直向下方向为 x 正向建立如图所示的直角坐标系,由三角形相似关系可知, x 处半径 r $\frac{ AO }{ AE } = \frac{1}{2} \Rightarrow AO = 3$ $ OE = 3$ $ AE = AO + OE $ $\frac{ AO }{ AO + x} = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{x+3}{3}$ $dw = \rho(\pi r^2 dx) g x = \pi \rho g \cdot x \cdot \left(\frac{x+3}{3}\right)^2 dx$ $= \pi \rho g \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{9} dx$ $W = \int_0^3 dw$ $= \int_0^3 \pi \rho g \frac{1}{9} (x^3 + 6x^2 + 9x) dx$ $= \frac{\pi}{9} \rho g \left(\frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 \right) \Big _0^3$ $= \frac{\pi}{9} \rho g \left(\frac{81}{4} + \frac{27}{2} + \frac{9}{2} \right)$ $= \frac{13}{2} \pi \rho g$ $W = \int_0^3 dw$ $= \int_0^3 \frac{1}{9} \pi \rho g (x^3 + 6x^2 + 9x) dx$ $= \frac{1}{9} \pi \rho g \left(\frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 \right) \Big _0^3$ $= \pi \rho g \left(\frac{9}{4} + 6 + \frac{9}{2} \right)$ $= \frac{51}{4} \pi \rho g$ 注 参考答案 $\frac{51}{4} \pi \rho g \pi$ 系多一个 π 之误.	

题号 P137

二 3

设底边为 a , 高为 h 的等腰三角形平板垂直放入水中, 且底边与水面平齐, 求平板一侧所受的压力。

解 以底边方向为 y 轴, 以高方向为 x 轴, 建立如图所

示的直角坐标系, 则 $|AB| = a$

$|OE| = h$, 在 x 处, $|CD|$ 由相似

三角形比例关系.

$$\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{h-x}{|OE|} \Rightarrow \frac{|CD|}{a} = \frac{h-x}{h}$$

$$|CD| = \frac{a}{h}(h-x)$$

$$dF = p dA = \rho g x \cdot |CD| dx$$

$$= \rho g x \cdot \frac{a}{h}(h-x) dx$$

$$= \frac{a \rho g}{h} (hx - x^2) dx$$

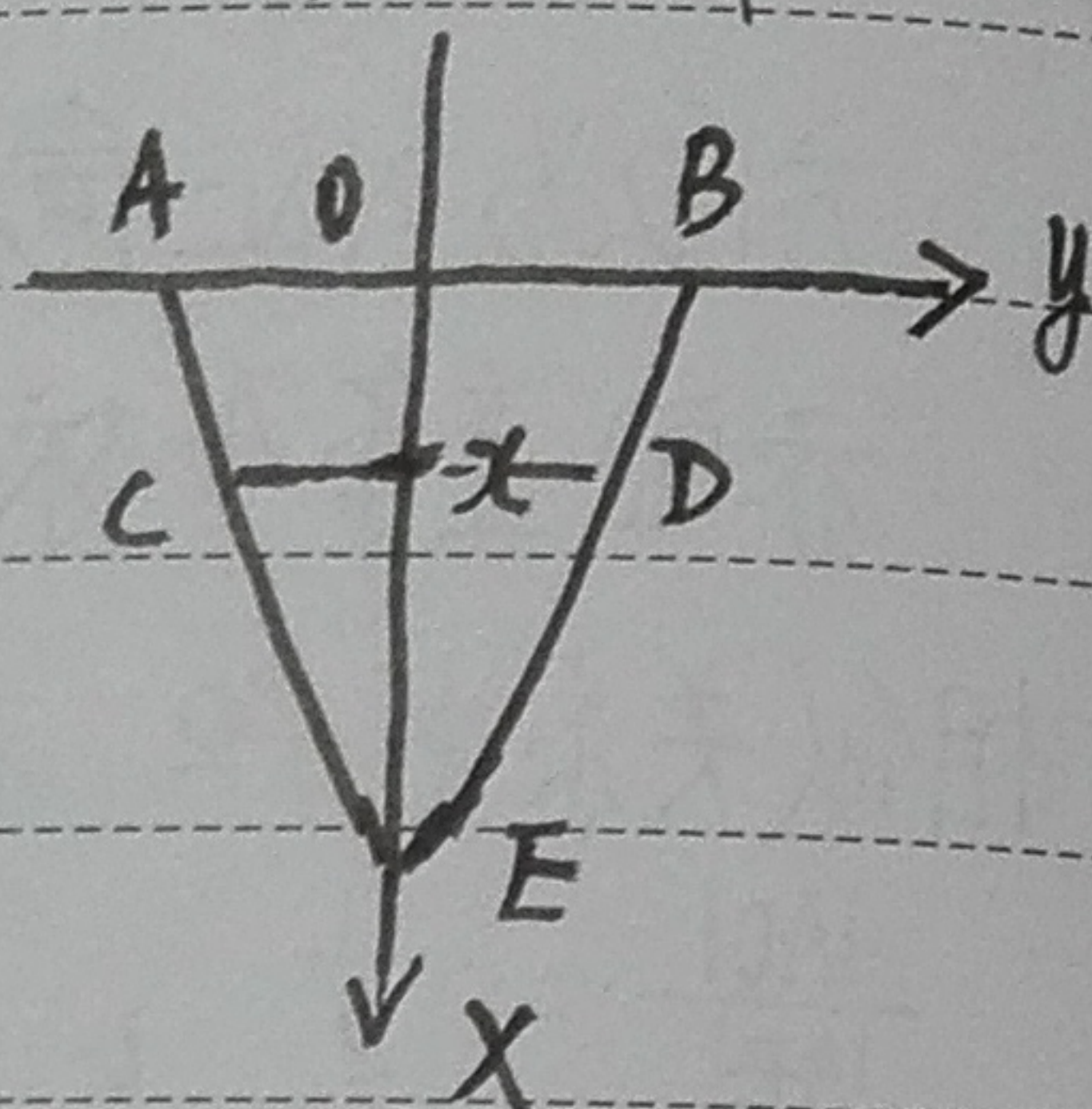
$$F = \int_0^h dF$$

$$= \int_0^h \frac{a \rho g}{h} (hx - x^2) dx$$

$$= \frac{a}{h} \rho g \left(\frac{h}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^h$$

$$= \frac{1}{6} a \rho g h^3$$

$$= \frac{1}{6} a \rho g h^2$$



题号

P137

答 题 内 容

廖国勇

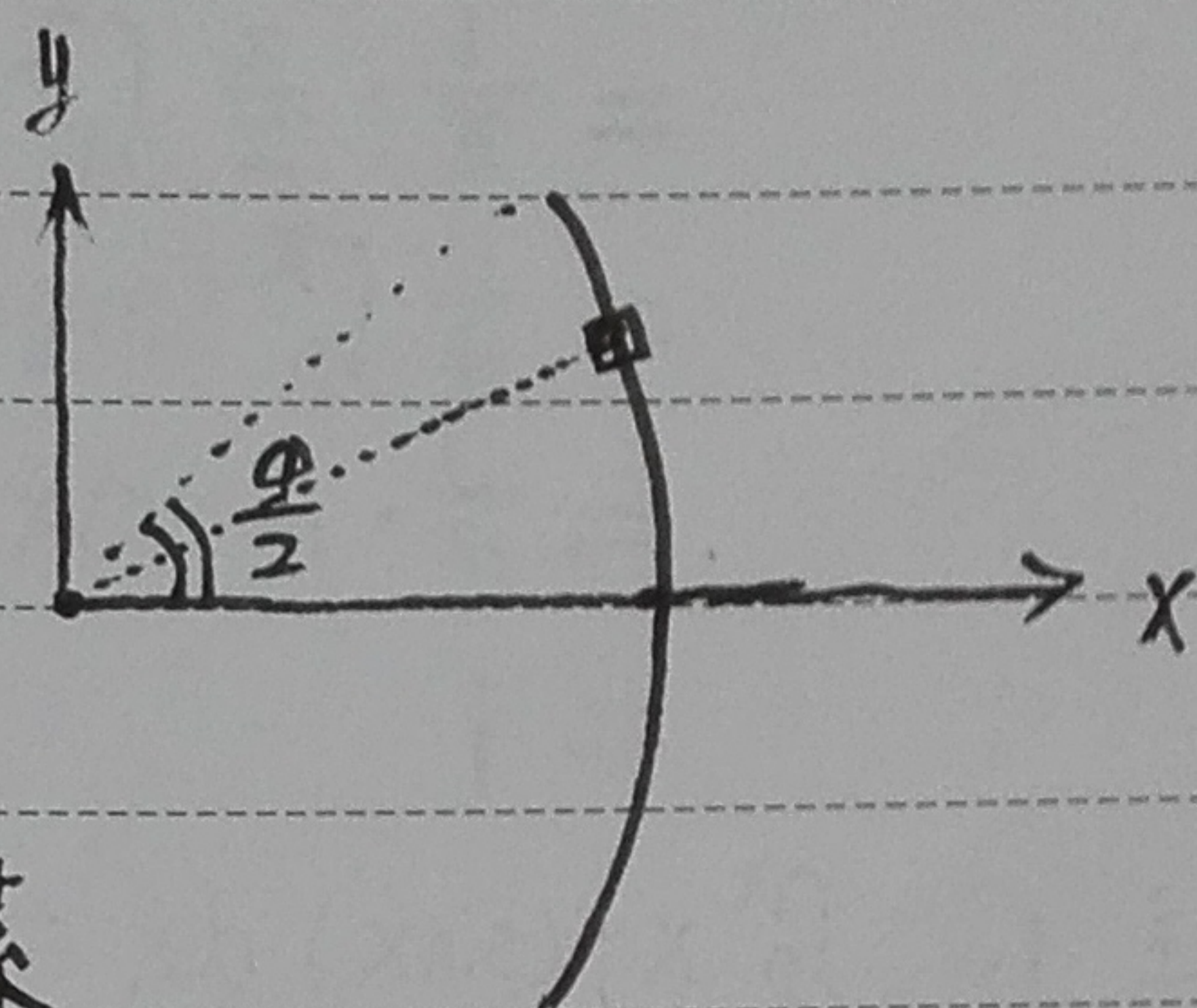
- 4 设有一个半径为 R , 中心角为 φ 的圆弧形细棒, 其线密度为常数 ρ , 在圆心处有一质量为 m 的质点 M , 求这细棒对质点 M 的引力.

解 以圆心为原点, 以弧的平分线为 ~~轴~~ 极轴方向建立如图所示的极坐标系.

引力元素

$$dF = G \cdot \frac{m \cdot R d\theta \rho}{R^2}$$

$$= \frac{m \rho G}{R} d\theta$$



G 为万有引力常数, $d\theta$ 为角元素

引力元素在 x 轴和 y 轴上的分力分别为

$$dF_x = dF \cdot \cos\theta = \frac{m \rho G}{R} \cos\theta d\theta$$

$$dF_y = dF \cdot \sin\theta = \frac{m \rho G}{R} \sin\theta d\theta$$

于是有

$$F_x = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} dF_x = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \frac{m \rho G}{R} \cos\theta d\theta = \frac{2m \rho G}{R} \cdot \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$F_y = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} dF_y = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \frac{m \rho G}{R} \sin\theta d\theta = 0$$

奇函数

题号

P137

= 5 求函数 $y = x \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的平均值

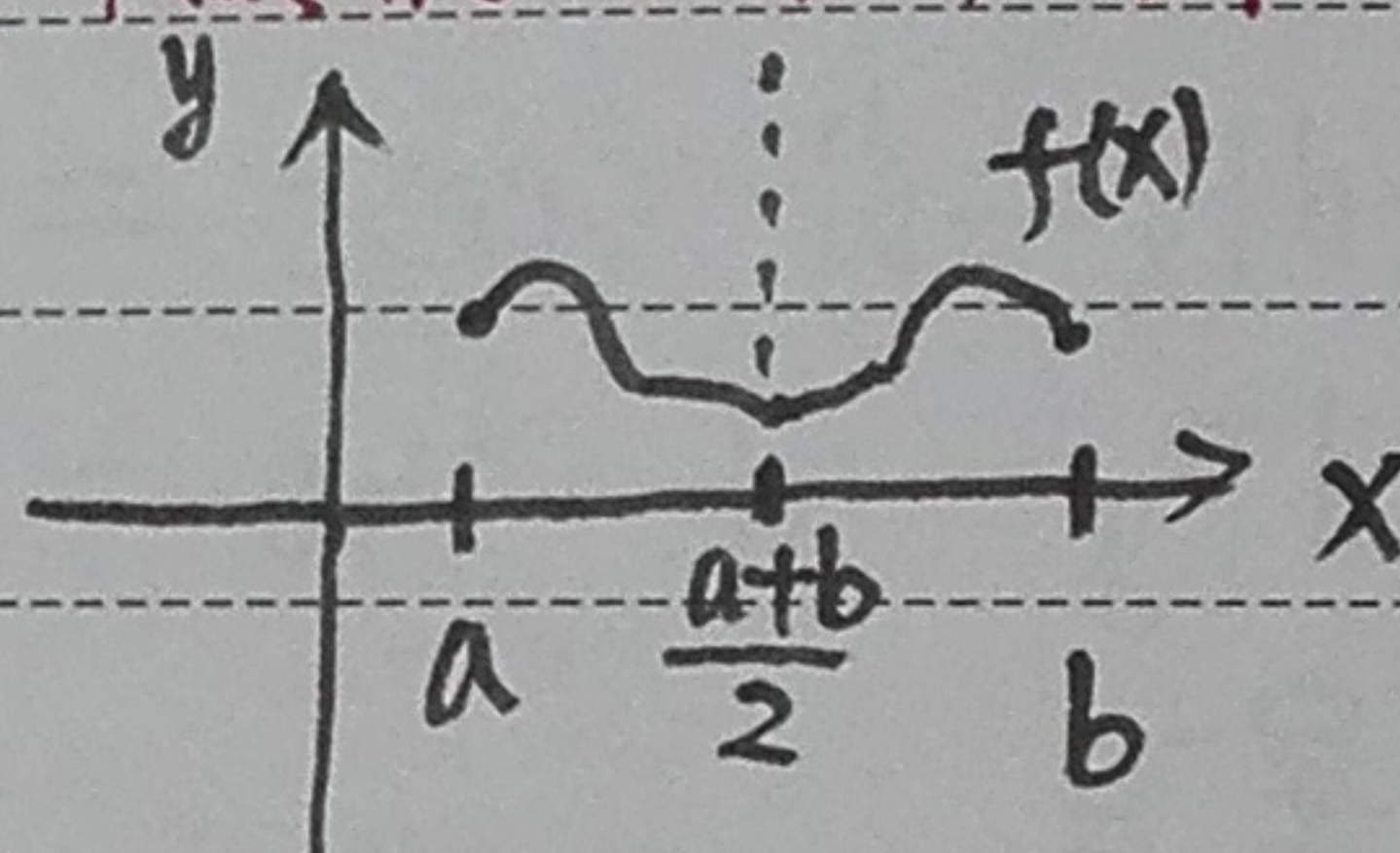
$$\begin{aligned} \text{解 } \bar{y} &= \frac{1}{\pi-0} \int_0^{\pi} y dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin x dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-\cos x) \Big|_0^{\pi} \\ &= 1 \end{aligned}$$

注 1. $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$

2. 一般地, 若 $f(x)$ 关于积分区域中点偶对称, 即

$$f(x) = f(a+b-x)$$

$$\text{则 } \int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$$



下面严格证明一下

设 $y = a+b-x$, 则 $dx = -dy$, $x = a+b-y$ $x=a$ 时 $y=b$
 $x=b$ 时 $y=a$

$$I = \int_a^b x f(x) dx$$

$$= \int_b^a (a+b-y) f(a+b-y) (-dy)$$

$$= \int_a^b (a+b-y) f(a+b-y) dy$$

$$= \int_a^b (a+b-y) f(y) dy$$

$$(f(a+b-y) = f(y))$$

$$= (a+b) \int_a^b f(y) dy - \int_a^b y f(y) dy$$

$$= (a+b) \int_a^b f(x) dx - \int_a^b x f(x) dx$$

(积分与积分变元选择无关)

$$= (a+b) \int_a^b f(x) dx - I$$

$$\Rightarrow I = \int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$$